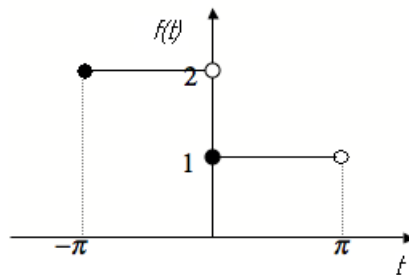


PROBLEMAS 1: SERIES DE FOURIER Y TRANSFORMADA DE FOURIER

Fundamentos Matemáticos de la Ingeniería 2007/08
Ingeniería Técnica en Telecomunicación - Telemática

Problema 1 (2 puntos) Considera la gráfica de la función f :



- a) Escribe la expresión de la función f a partir de su gráfica. Si extendemos la función f periódicamente a todo \mathbb{R} , ¿cuál es el periodo fundamental y la frecuencia fundamental de f ?
- b) Demuestra que la serie exponencial de f viene dada por la expresión

$$\frac{3}{2} - \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{e^{(2k-1)jt}}{(2k-1)j\pi}$$

y calcula la serie trigonométrica de Fourier de f .

- c) ¿La función f es igual a su serie de Fourier en todo $t \in \mathbb{R}$? Como aplicación, halla el valor de la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1}.$$

Problema 2 (1.2 puntos) Considera la función f definida por

$$f(t) = 1 + \cos\left(\frac{t}{2}\right)$$

en el intervalo $[-\pi, \pi[$ repetida periódicamente en todo \mathbb{R} . Dibuja la gráfica de f en el intervalo $[-2\pi, 2\pi]$ y utiliza las propiedades de las funciones pares e impares para calcular la serie de Fourier trigonométrica de f .

Problema 3 (1.2 puntos) Considera la función periódica de periodo fundamental $T = 2$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} (a^2 - 1)(1 + \cos(\pi t)) & \text{si } t \in [0, 1] \\ \cos(\pi t) & \text{si } x \in (-1, 0) \end{cases}$$

Encuentra todos los valores del parámetro a para que la correspondiente serie de Fourier converja a f en el punto $t = 0$.

Problema 4 (1.2 puntos) Comprueba si las siguientes integrales impropias convergen:

$$a) \int_0^\infty e^{-t} \sin t \, dt \quad b) \int_0^\infty \frac{\sqrt[6]{t}}{\sqrt[3]{t^4 + 5}} dt$$

c) Calcula el valor exacto de la integral a) en caso que converja.

Problema 5 (1.2 puntos) Encuentra el valor de la función

$$u(1 - t^2) + u(t + 3).$$

Problema 6 (2 puntos) Considera la función f dada por

$$f(t) = u(\pi^2 - t^2) \cos t.$$

a) Utiliza las propiedades de las funciones pares e impares para demostrar que la transformada de Fourier de f viene dada por la expresión:

$$\mathcal{F}(f)(w) = \begin{cases} \frac{2w \operatorname{sen} \pi w}{1 - w^2} & \text{si } w \neq 1, -1 \\ \pi & \text{si } w = 1, -1 \end{cases}$$

b) Encuentra la transformada inversa de $G(w) = \mathcal{F}(f)(w)$.

c) Aplica los resultados obtenidos para calcular la siguiente integral:

$$\int_0^\infty \frac{w \operatorname{sen} \pi w}{1 - w^2} dw.$$

Problema 7 (1.2 puntos) Considera una función $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ tal que

$$\int_{-\infty}^\infty |G(t)| dt < \infty.$$

a) Si G es par, ¿sabrías dar una fórmula que simplifique el cálculo de la transformada inversa? ¿Y si G es impar?

b) Si se cumplen las condiciones del Teorema de Inversión de Fourier y G es continua, demuestra que

$$\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}^{-1}(G))(w) = \frac{G(-w)}{2\pi}.$$